| | |
|---|---|
| Jyväskylän yliopisto | **Harjoitus 6** |
| Matematiikan ja tilastotieteen laitos | Ti 3.5.2011 |
| MATS353 Stokastiset differentiaaliyhtälöt 2 | L. Leskelä |

Määritellään *Besselin prosessi* $R$ kaavalla $R_t = ||B_t||$, missä $B$ on Brownin liike $\mathbb{R}^n$:ssä, $n \geq 2$.

**6.1** Näytä, että stokastinen integraali

$$\tilde{B}_i(t) = \int_0^t \frac{B_i(s)}{R_s}\, dB_i(s)$$

on hyvin määritelty.

**6.2** Merkitään $g(y) = \sqrt{y}$ ja määritellään funktio $g_\epsilon$ kaavalla

$$g_\epsilon(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}\epsilon^{1/2} + \frac{3}{4}\epsilon^{-1/2}y - \frac{1}{8}\epsilon^{-3/2}y^2, & y < \epsilon, \\ \sqrt{y}, & y \geq \epsilon. \end{cases}$$

(a) Näytä, että $g_\epsilon \in C^2(\mathbb{R})$ kaikilla $\epsilon > 0$.

(b) Näytä, että $g_\epsilon(y) \to g(y)$ kun $\epsilon \to 0$ kaikilla $y \geq 0$.

**6.3** Merkitään $Y_t = R_t^2$. Näytä Itōn kaavaa soveltaen, että

$$g_\epsilon(Y_t) = g_\epsilon(r^2) + \sum_{i=1}^n I_t^{(i)}(\epsilon) + J_t(\epsilon) + K_t(\epsilon),$$

missä

$$\begin{aligned} I_t^{(i)}(\epsilon) &= \int_0^t \left( 1(Y_s \geq \epsilon)R_s^{-1} + 1(Y_s < \epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}\left(3 - \frac{Y_s}{\epsilon}\right)\right) B_i(s)\, dB_i(s), \\ J_t(\epsilon) &= \int_0^t 1(Y_s \geq \epsilon)\frac{n-1}{2R_s}\, ds, \\ K_t(\epsilon) &= \int_0^t 1(Y_s < \epsilon)\frac{1}{4\sqrt{\epsilon}}\left(3n - (n+2)\frac{Y_s}{\epsilon}\right) ds. \end{aligned}$$

**6.4** Näytä, että kun $\epsilon \to 0$,

$$I_t^{(i)}(\epsilon) \xrightarrow{L^2} \tilde{B}_i(t), \quad J_t(\epsilon) \xrightarrow{\text{m.v.}} \int_0^t \frac{n-1}{2R_s}\, ds, \quad K_t(\epsilon) \xrightarrow{L^1} 0,$$

minkä perusteella

$$R_t = R_0 + \int_0^t \frac{n-1}{2R_s}\, ds + \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i(t).$$

(Vihje: Voidaan olettaa tunnetuksi, että $\epsilon^{-1/2}\int_0^t P(Y_s < \epsilon)\, ds \to 0$, kun $\epsilon \to 0$.)

**6.5** Näytä, että $\hat{B}(t) := \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i(t)$ on Brownin liike $\mathbb{R}$:ssä ja että Besselin prosessi $R$ ratkaisee differentiaaliyhtälön

$$dR_t = \frac{n-1}{2R_t}\, dt + d\hat{B}(t).$$